**Лабораторная работа № 2**

*Методы спуска (0-го, 1-го и 2-го порядка и переменной метрики)*

**Цель работы**

Ознакомиться с методами поиска минимума функции *n* переменных в оптимизационных задачах без ограничений.

**Методические указания**

*1. Общая схема методов спуска*

Пусть дана функция , где , и задана начальная точка . Требуется найти минимум функции  с точностью  – по функции,  – по переменным , где .

На *k*-м шаге () определяем вектор , в направлении которого функция  уменьшается. В этом направлении делаем шаг величиной  и получаем новую точку , в которой . Поиск прекращаем как только  или для всех  верно .

Различные методы спуска отличаются выбором направления и величины шага. Как правило, для нахождения  используется процедура одно­мер­но­го поиска.

*2. Методы 0-го порядка (прямые методы)*

К методам нулевого порядка относятся методы, не использующие производные для выбора направления спуска: метод вращающихся координат; метод деформируемого многогранника; метод Хука и Дживса; метод Гаусса; метод Пауэлла.

*3. Методы 1-го порядка*

К методам первого порядка относятся методы, использующие производные первого порядка для выбора направления спуска: метод наискорейшего спуска; метод сопряженных градиентов в модификации Данилина-Пшеничного (Полака-Рибьера); метод сопряженных градиентов в модификации Флетчера-Ривса.

*4. Методы 2-го порядка*

К методам второго порядка относятся методы, использующие производные первого и второго порядка для выбора направления спуска: метод Ньютона и его модификации.

*5. Методы переменной метрики*

К методам переменной метрики относятся методы первого порядка, в которых при работе алгоритма на квадратичных функциях аппроксимируется матрица, обратная к матрице вторых частных производных. Как и методы сопряженных градиентов они имеют квадратичную за *n* шагов скорость сходимости. К ним относятся: метод Бройдена, метод Флетчера; метод Пирсона и др.

**Методы поиска для самостоятельной реализации**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **N** | **Метод** | **Порядок** | **Уровень сложности** |
| 2 | метод Гаусса | 0 | 1 |
|  | метод Хука и Дживса | 0 | 1 |
| 1 | метод Пауэлла | 0 | 2 |
|  | метод вращающихся координат (Розенброка) | 0 | 2 |
|  | метод деформируемого многогранника | 0 | 3 |
|  | метод наискорейшего спуска | 1 | 2 |
| 2 | метод сопряженных градиентов в модификации Данилина-Пшеничного (Полака-Рибьера); | 1 | 3 |
| 2 | метод сопряженных градиентов в модификации Флетчера-Ривса | 1 | 3 |
|  | методы Пирсона | переменной метрики | 4 |
| 1 | метод Девидона-Флетчера-Пауэлла | переменной метрики | 4 |
| 1 | метод Бройдена | переменной метрики | 4 |
| 2 | метод Ньютона | 2 | 3 |

**Порядок выполнения работы**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Вид работы | Баллы |
|  | Реализовать **два метода** поиска экстремума функции (разного порядка) Включить в реализуемый алгоритм собственную процедуру, реализующую одномерный поиск по направлению. Методы поиска для самостоятельной реализации выбираются студентом в зависимости от уровня сложности. Выбранные методы должны иметь разный порядок (например, метод Гаусса (нулевого порядка) - 1 балл и метод Ньютона (второго порядка) - 3 балла, итого 9 баллов). | 5+сложность методов  (в сумме от 7 до 12) |
|  | С использованием разработанного программного обеспечения исследовать алгоритмы на квадратичной функции , функции Розенброка  и на заданной в соответствии с вариантом тестовой функции, осуществляя спуск из различных исходных точек (не менее двух). Исследовать сходимость алгоритма, фиксируя точность определения минимума/максимума, количество итераций метода и количество вычислений функции в зависимости от задаваемой точности поиска. Результатом выполнения данного пункта должны быть выводы об объёме вычислений в зависимости от задаваемой точности и начального приближения. |
| 3\* | Построить траекторию спуска различных алгоритмов из одной и той же исходной точки с одинаковой точностью. В отчете наложить эту траекторию на рисунок с линиями равного уровня заданной функции. | 1 |
| 4\* | Реализовать метод квадратичной интерполяции (метод парабол) для приближенного нахождения экстремума при одномерном поиске. Исследовать влияние точности одномерного поиска на общее количество итераций и вычислений функции при разных методах одномерного поиска. | 2 |

\*) Выполняется по желанию студентов

**Варианты заданий**

Условие задачи:

Найти **максимум** заданной функции:

Для нечетных вариантов целевая функция имеет вид:



Для четных вариантов целевая функция имеет вид:



Варианты:

- (2 / (1 + (((x - 1) / 2)^ 2) + (((y - 1) / 1)^ 2))

+ 3 / (1 + (((x - 2) / 3)^ 2) + (((y - 3) / 2)^ 2)))

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ варианта** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| **2** | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| **3** | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| **4** | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| **5** | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| **6** | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| **7** | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| **8** | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| **9** | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| **10** | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| **11** | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| **12** | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |

**Содержание отчета**

Отчет должен содержать:

* титульный лист;
* цель работы;
* задание;
* таблицы с результатами проведенных исследований, где должны быть отражены начальное приближение , задаваемая точность по функции и переменным ( от  до ), количество итераций*,* число вычислений целевой функции, найденная точка и значение функции в ней.
* для каждой целевой функции при точности поиска по переменным и функции  и одной начальной точке составить следующую таблицу

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (,) |  | Направление поиска (,) | Экстремум одномерного поиска |  | Градиент функции\*,  матрица вторых производных\*\* |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

\*) Для методов первого и второго порядка и переменной метрики

\*\*) Для методов второго порядка. Для методов переменной метрики - аппроксимация матрицы вторых производных.

* выводы о сходимости алгоритмов в зависи­мости от точности и начального приближения с указанием преимуществ и недостатков.

В отчет необходимо включить текст разработанной программы поиска, результаты ее тестирования.

**Контрольные вопросы**

1. Метод Гаусса.
2. Метод Хука и Дживса.
3. Метод Розенброка (вращающихся координат).
4. Метод Пауэлла.
5. Метод деформируемого многогранника.
6. Метод наискорейшего спуска.
7. Метод сопряженных градиентов и его модификации.
8. Метод Ньютона и его модификации.
9. Методы переменной метрики.